Lerntutorial: Exponentialfunktion und Logarithmus

Das exponentielle Wachstum unserer Weltbevölkerung



Abbildung 1: Symbolische Darstellung des exponentiellen Wachstums der Weltbevölkerung

Willkommen zum Tutorial!

Unser heutiges Thema wirkt auf den ersten Blick harmlos, hat aber eine enorme Wirkung, wenn man es versteht. Die Rede ist vom **exponentiellen Wachstum**. Auch wenn dieser Begriff zuerst technisch klingt, werden wir ihn heute ganz anschaulich und verständlich herleiten. Wir verzichten auf trockene Definitionen und nutzen stattdessen ein faszinierendes Beispiel aus der Realität: die Entwicklung der Weltbevölkerung.

Was du hier lernen wirst

- **Exponentielles Wachstum verstehen:** Du lernst das Prinzip des exponentiellen Wachstums am Beispiel der Weltbevölkerung kennen.
- **Wachstum berechnen:** Du wendest **Exponentialfunktionen und Wachstumsfaktoren** an, um zukünftige Bevölkerungszahlen zu berechnen.
- **Mit Logarithmen arbeiten:** Du lernst, mithilfe des **Logarithmus** herauszufinden, wann ein bestimmter Zielwert erreicht wird.
- **Potenzgesetze anwenden:** Du wiederholst wichtige **Rechenregeln für Potenzen** und nutzt sie bei Wachstumsprozessen.

1 Exponentielles Wachstum

Die Ausgangssituation

Reisen wir gedanklich zurück in das Jahr **2020**.* Zu diesem Zeitpunkt lebten rund **7,8 Milliarden Menschen** auf der Erde. Das ist unsere Ausgangsbasis. In der mathematischen Notation nennen wir diese Zahl den Startwert und schreiben dafür kurz:

$$P(0) = 7{,}8.$$

Natürlich bleibt die Anzahl an Menschen nicht gleich. Durch Geburten und eine höhere Lebenserwartung kommen jedes Jahr Menschen hinzu. Weltweit liegt dieses Wachstum bei etwa **1 Prozent pro Jahr** ($1\ \% = 0{,}01$). Das klingt erst einmal nach wenig, aber genau hier liegt der entscheidende Punkt: Die Bevölkerung wächst nicht jedes Jahr um eine feste Anzahl an Menschen, sondern immer um **den gleichen Prozentsatz**. Und genau dieser feine Unterschied führt zu dem faszinierenden Effekt, den wir exponentielles Wachstum nennen.

*Die in diesem Tutorial dargestellten Situationen sind fiktiv, orientieren sich jedoch an realitätsnahen Szenarien. Sie wurden zu Lehrzwecken entwickelt.

Was heißt „exponentielles Wachstum“?

Beim exponentiellen Wachstum wächst eine Größe nicht gleichmäßig (linear) an. Sie wächst immer schneller, weil sie jedes Jahr auf einer größeren Basis weiterwächst.

Exkurs: Das Prinzip am Beispiel Geld (Zinseszinseffekt)

Stell dir vor, du legst **100 Euro** an und erhältst jährlich **10 Prozent Zinsen** darauf.

- Nach dem **ersten Jahr** erhältst du 10 Euro Zinsen, du besitzt dann also 110 Euro.
- Im **zweiten Jahr** bekommst du deine 10 % auf die 110 Euro und erhältst damit einen höheren Zinsbetrag als zuvor, nämlich **11 Euro**.

Ein Euro mehr klingt zunächst nicht nach viel, aber über **10 Jahre** wächst der Gesamtbetrag durch die Zinsen schon auf über **259 Euro**, sodass du im elften Jahr schon **25,90 Euro** Zinsen bekommst – mehr als doppelt so viel wie am Anfang! Diesen Mechanismus kennen wir als **Zinseszinseffekt**.

Genauso verhält es sich auch beim exponentiellen Wachstum. Anfangs verläuft die Kurve noch flach, doch mit der Zeit wird sie immer steiler. Dieses Muster findest du in Bevölkerungsstatistiken ebenso wie auf Bankkonten oder bei der Verbreitung von Viren.

Die Formel dahinter

Um dieses exponentielle Wachstum mathematisch präzise zu beschreiben, nutzen wir eine kurze, aber mächtige Gleichung:

$$P(t) = P(0) \cdot r^t,$$

wobei der Wachstumsfaktor r definiert ist als

$$r = 1 + i.$$

Hinweise zur Formel

Schauen wir uns kurz an, wofür diese Buchstaben im Detail stehen:

- $P(t)$ ist unser **Zielwert** und beschreibt die Bevölkerung nach t Jahren.
- $P(0)$ ist der **Startwert**, also die Bevölkerungszahl am Anfang unserer Rechnung (7,8 Mrd.).
- i ist die **Wachstumsrate** (in unserem Fall 1 % = 0,01).
- r steht für den **Wachstumsfaktor**, welcher gleich $1 + i$ ist (hier also $1 + 0{,}01 = 1{,}01$).
- t ist der **Exponent** und gibt die Zeit in Jahren an.

Das Prinzip ist simpel: Jedes Jahr multiplizieren wir die aktuelle Bevölkerungszahl mit dem immer gleichen Faktor $r = 1{,}01$.

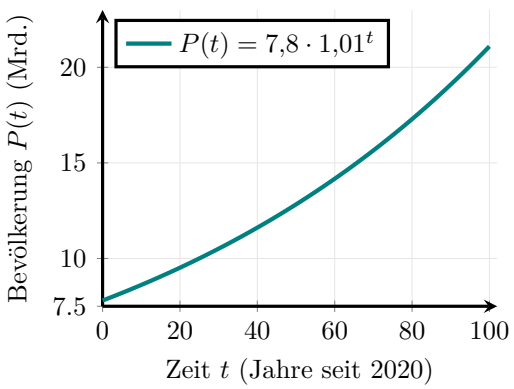


Abb. 1: Visualisierung der exponentiellen Wachstumskurve der Weltbevölkerung

2 Berechnung für die Jahre 2028 und 2030

Jetzt wollen wir dieses Wissen anwenden. Unsere Frage ist, wie groß die Weltbevölkerung im Jahr **2028** sein wird, also genau **acht Jahre** nach dem Startpunkt. Dabei wird ein jährliches Wachstum von 1 % angenommen, ausgehend von einer Bevölkerung von 7,8 Milliarden im Jahr 2020. Hier beginnt dein aktiver Teil. Nimm dir ein paar Minuten Zeit, um die Werte in die Formel einzusetzen und das Ergebnis zu berechnen.

Übungsaufgabe 1: Berechnung für 2028

Wie groß wird die Weltbevölkerung im Jahr 2028 sein?

Im Jahr 2028 leben rechnerisch ca. ..... Milliarden Menschen auf der Erde.

Überprüfung und Vertiefung

Lass uns zuerst dein Ergebnis überprüfen. Wenn du richtig gerechnet hast, kommst du für das Jahr 2028 gerundet auf **8,45 Milliarden Menschen**.
Damit du den Rechenweg sicher nachvollziehen kannst, gehen wir das Schema nun gemeinsam an einem zweiten Beispiel durch. Wir berechnen nun die Bevölkerungszahl nicht nach 8, sondern nach **10 Jahren** (also für das Jahr **2030**). Das Prinzip bleibt dabei gleich:

$$P(10) = 7{,}8 \cdot 1{,}01^{10}$$

Das bedeutet im Detail: Wir multiplizieren 7,8 zehnmal mit 1,01. Wir nehmen also den Startwert 7,8 und berechnen, wie er sich verändert, wenn er über 10 Jahre jedes Jahr um 1 % wächst. Jedes Mal steht das Ergebnis des Vorjahres wieder als Ausgangswert für das nächste Jahr zur Verfügung. Wir rechnen also nicht jedes Mal mit dem ursprünglichen Anfangswert, sondern nutzen das Ergebnis des Vorjahres als neuen Basiswert:

- → **1. Jahr:** $7{,}8 \cdot 1{,}01$
- → **2. Jahr:** (Ergebnis aus dem 1. Jahr) $\cdot\, 1{,}01$, also $7{,}8 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 = 7{,}8 \cdot 1{,}01^2$
- → **3. Jahr:** (Ergebnis aus dem 2. Jahr) $\cdot\, 1{,}01$, also $7{,}8 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 = 7{,}8 \cdot 1{,}01^3$
- → ... und so weiter.

Mit der Formel fassen wir diese zehnfache Multiplikation einfach elegant zusammen:

$$P(10) = 7{,}8 \cdot 1{,}01^{10} \approx 8{,}62$$

Ergebnis: Im Jahr 2030 leben rechnerisch circa **8,62 Milliarden Menschen** auf der Erde. Das ist ein Zuwachs von **0,82 Milliarden bzw. 820 Millionen Menschen** in nur 10 Jahren – und das bei gerade einmal 1 % Wachstum pro Jahr!

3 Warum der Logarithmus kein Hexenwerk ist

Viele Menschen erschrecken, wenn sie das Wort "Logarithmus" hören. Dabei ist er nichts anderes als eine logische **Rückwärtsfrage**:

"Wie oft muss ich eine Basis mit sich selbst multiplizieren, um ein bestimmtes Ergebnis zu bekommen?"

Mathematisch ausgedrückt gilt der Zusammenhang zwischen Potenz und Logarithmus wie folgt:

$$y^x = b \Leftrightarrow x = \log_y(b)$$

Einfaches Beispiel

Wenn $2^3 = 8$ ist, dann ist $\log_2 8 = 3$.
Das heißt übersetzt: *"Wie oft muss ich die Basis 2 mit sich selbst multiplizieren, um 8 zu erreichen?"* (Antwort: 3-mal).

Der Logarithmus ist also der direkte **Gegenspieler der Potenz**. Du kannst dir den Logarithmus wie eine Gegenoperation vorstellen, die den Exponenten aus der Potenz "befreit".

Allgemeine Rechenregeln des Logarithmus

Es gelten die folgenden fundamentalen Gleichungen:

$$\log_b b^t = t$$

Hier neutralisiert der Logarithmus zur Basis b die Potenzbasis b, wodurch der Exponent t frei wird.

$$b^{\log_b t} = t$$

Das gleiche Prinzip funktioniert auch in umgekehrter Reihenfolge.

Zur Erinnerung

Es ist zwingend erforderlich, dass die **Basis des Logarithmus** und die **Basis der Potenz** absolut identisch sind:

- $\log_2 2^5 = 5 \implies$ Gleiche Basis $\rightarrow$ neutralisiert sich!
- $\log_2 3^5 = ? \implies$ Basen ungleich $\rightarrow$ neutralisieren sich nicht! (Per Taschenrechner zu lösen).

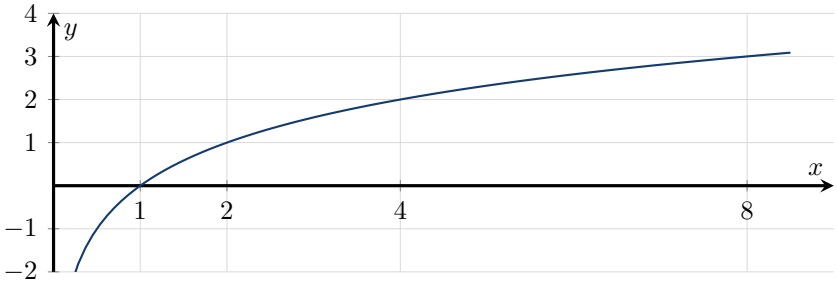


Abb. 2: Verlauf der Logarithmusfunktion $y = \log_2 x$

4 Wann werden 9 Milliarden Menschen auf der Erde leben?

Jetzt drehen wir den Spieß um. Bisher haben wir immer gefragt, wie viele Menschen in einem bestimmten Jahr leben (Zukunftsprognose). Nun geben wir einen **Zielwert** vor und suchen den dazugehörigen **Zeitpunkt** t.
Unsere große Frage lautet: Wann wird die Weltbevölkerung voraussichtlich die Marke von **9 Milliarden Menschen** knacken?
Du hast bereits alle nötigen Zahlen für diese Rechnung: Du kennst den Startwert von 7,8 Milliarden ($P(0) = 7{,}8$) und den jährlichen Wachstumsfaktor von 1,01 ($r = 1{,}01$). Die Formel lautet:

$$P(t) = P(0) \cdot r^t$$

Deine Aufgabe ist es nun herauszufinden, welche Zahl du für den Exponenten t einsetzen musst, damit das Ergebnis genau 9 ergibt. Probiere es jetzt eigenständig aus!

Übungsaufgabe 2: Berechnung des Zieljahres

Wann wird die Weltbevölkerung 9 Milliarden Menschen betragen?
Stelle die Formel nach t um und berechne die exakte Jahreszahl.

Nach ..... Jahren seit 2020, also im Jahr ....., wird die Weltbevölkerung die 9-Milliarden-Marke erreichen.

Schritt-für-Schritt-Anleitung am Beispiel von 10 Milliarden

Wenn du die obigen Schritte richtig ausgeführt hast, kommst du auf das Ergebnis, dass $t \approx 14{,}38$ ist, die 9 Milliarden Menschen also im Laufe des Jahres **2034** erreicht werden.
Damit du deine Rechnung abgleichen kannst, gehen wir den schematischen Lösungsweg noch einmal gemeinsam für einen anderen Zielwert durch: Wir berechnen, wann **10 Milliarden Menschen** erreicht werden.

Schritt 1: Werte in die Grundformel einsetzen

$$10 = 7{,}8 \cdot 1{,}01^t$$

Schritt 2: Isolieren der Potenz

(a) Teilen durch den Startwert 7,8:

$$\frac{10}{7{,}8} = 1{,}01^t \implies 1{,}2821 \approx 1{,}01^t$$

(b) Anwendung des Logarithmus zur Basis 1,01 auf beiden Seiten:

$$\log_{1{,}01} 1{,}2821 = \log_{1{,}01} 1{,}01^t$$

Schritt 3: Befreien des Exponenten (Nutzen der Neutralisierungsregel)
Da $\log_{1{,}01} 1{,}01^t = t$ ergibt, erhalten wir:

$$\log_{1{,}01} 1{,}2821 = t$$

Schritt 4: Berechnung mit dem Taschenrechner:

$$t \approx 24{,}97$$

Fazit des Beispiels: Nach ungefähr 24,97 Jahren, ausgehend vom Jahr 2020 (also gegen Ende des Jahres **2044**), wird die Weltbevölkerung die Marke von 10 Milliarden Menschen betragen. Nutze diesen Fahrplan, um deine eigene Berechnung für die 9 Milliarden zu überprüfen!

5 Wiederholung – Die wichtigsten Rechenregeln der Potenzen

Damit wir das Ganze vollumfänglich verstehen, schauen wir uns kurz noch die vier wichtigsten Potenzgesetze an. Sie erklären, wie man mit Wachstumsfaktoren mathematisch korrekt operiert.

1. Addition der Exponenten

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

Bedeutung: Wenn eine Größe erst n Jahre lang und danach noch einmal m Jahre wächst, kann man die einzelnen Wachstumsfaktoren multiplizieren oder direkt zu $(n+m)$ Jahren zusammenfassen.
Beispiel: $1{,}2^3 \cdot 1{,}2^7 = 1{,}2^{3+7} = 1{,}2^{10}$
Wenn es erst 3 Jahre wächst und dann noch einmal 7 Jahre, entspricht das 10 Jahren Gesamtwachstum.

2. Subtraktion der Exponenten

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$

Bedeutung: Wenn man vom Stand nach n Jahren um m Jahre zurückrechnen möchte, dividiert man durch den entsprechenden Wachstumsfaktor.
Beispiel: $\frac{2{,}3^{10}}{2{,}3^7} = 2{,}3^{10-7} = 2{,}3^3$
Wenn wir vom Stand nach 10 Jahren 7 Jahre zurückgehen, haben wir den Stand vor 3 Jahren.

Zwischenfazit: Gehen wir in der Zeit vorwärts, multiplizieren wir mit dem Wachstumsfaktor. Gehen wir in der Zeit zurück, dividieren wir durch ihn.

3. Negativer Exponent

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Bedeutung: Ein negativer Exponent dreht die Zeitrichtung mathematisch einfach um. Statt in die Zukunft zu rechnen, rechnen wir damit direkt in die Vergangenheit zurück.
Beispiel: $1{,}9^{-2} = \frac{1}{1{,}9^2}$
Wir gehen in der Zeit 2 Jahre zurück.

4. Doppelte Potenz (Potenz von Potenzen)

$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

Bedeutung: Wenn etwas m-mal hintereinander jeweils n Jahre wächst, entspricht das einem Gesamtwachstum von $n \cdot m$ Jahren.
Beispiel: $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^6$
Zweimal drei Jahre Wachstum entsprechen sechs Jahren Wachstum.

6 Was wir daraus lernen

Exponentielles Wachstum ist einer der **wichtigsten Prozesse in unserer Welt**. Es beschreibt nicht nur die Bevölkerungsentwicklung, sondern auch Zinseszinsen, Bakterienwachstum, technologische Entwicklungen (wie Rechenleistung) und in manchen kritischen Bereichen sogar Klimaveränderungen.
Die Grundidee bleibt stets identisch: Ein kleiner, unscheinbarer Prozentsatz, der sich Jahr für Jahr auf das jeweils neue Ergebnis bezieht, führt über einen längeren Zeitraum hinweg zu einem **rasanten, explosionsartigen Anstieg**.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Hier sind alle berechneten Meilensteine und Prognosen übersichtlich zusammengefasst:

Berechnung/Szenario	Erwartete Bevölkerung	Prognostiziertes Jahr
Bevölkerung nach 8 Jahren	8,45 Milliarden	2028
Bevölkerung nach 10 Jahren	8,62 Milliarden	2030
Erreichen der 9-Milliarden-Marke	9,00 Milliarden	2034
Erreichen der 10-Milliarden-Marke	10,00 Milliarden	2044

7 Abschluss und Reflexion

Exponentielles Wachstum zeigt eindrucksvoll, wie stark kleine Veränderungen langfristig wirken. Ein einzelnes Prozent erscheint im Alltag völlig harmlos, wächst aber über die Jahre zu gewaltigen Summen an. Das gilt übrigens nicht nur in der reinen Mathematik oder für die Weltbevölkerung, sondern lässt sich auch auf das persönliche Leben übertragen: Kontinuierliche, kleine Schritte beim Lernen, Sparen oder beim Ausbilden von Gewohnheiten entfalten über die Zeit eine enorme, unaufhaltsame Dynamik. Exponentielles Denken öffnet den Blick für diese langfristigen Entwicklungen in unserer Welt.

Disclaimer

Für die hier durchgeführten Modellrechnungen haben wir zur didaktischen Vereinfachung eine konstante Wachstumsrate von einem Prozent angenommen. In der Realität ist die Welt ein komplexeres System: Die prozentuale Wachstumsrate der Weltbevölkerung sinkt aktuell leicht und die Bevölkerungskurve flacht ab. Unser Ausgangswert von 7,8 Milliarden ist jedoch gigantisch und trotz sinkender Rate steigt die absolute Zahl der Menschen vorerst weiter. Die Überbevölkerung und der daraus resultierende enorme Druck auf die endlichen Ressourcen unseres Planeten bleiben damit eine der größten globalen Herausforderungen unserer Zeit.

HOCHSCHULE LANDSHUT

Stiftung Innovation in der Hochschullehre

Dieses Tutorial wurde an der **Hochschule Landshut** im Projekt „**WiNGS** – Wirtschaftsmathe nachhaltig und ganzheitlich sehen“ entwickelt. Das Projekt wurde durch die **Stiftung Innovation in der Hochschullehre** im Rahmen von Freiraum 2025 unter der Projektnummer 3003-1102 gefördert.