Lerntutorial: Grundrechenarten & Prozentrechnung

Product Carbon Footprint und Amortisation einer Photovoltaikanlage

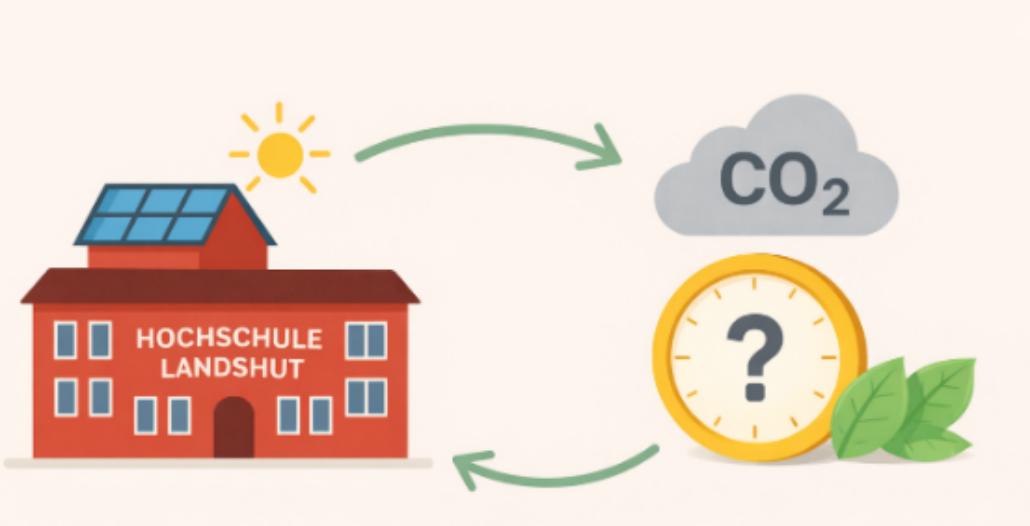


Abbildung 1: Symbolische Darstellung einer Photovoltaik-Anlage auf einem Hochschulgebäude

Willkommen zum Tutorial!

Hallo und herzlich willkommen zu diesem Tutorial! Heute widmen wir uns einem Thema, das auf den ersten Blick ganz einfach wirkt, aber überraschend wichtig wird, wenn man versteht, was wirklich dahintersteckt: **Grundrechenarten und Bruchrechnung**.

Klingt erstmal nach Schulmathe, oder? Aber keine Sorge: Wir schauen uns die Relevanz des Ganzen an, greifbar anhand einer Fragestellung aus dem Alltag.

Was du hier lernen wirst

- Grundrechenarten sicher anwenden
- Bruch- und Verhältnisrechnung verstehen und nutzen
- Amortisationsmodelle anhand einer realen Photovoltaik-Anlage verstehen

Unser Anwendungsfall

Die Hochschule plant die Installation einer Photovoltaik-Anlage (PV-Anlage) und möchte wissen:*

- Wie groß ist der CO_2-„Rucksack“ der Anlage?
- Wann rechnet sie sich ökologisch?
- Und lohnt sie sich auch finanziell?

Hier kommst du ins Spiel: Du unterstützt die Hochschule, indem du die Daten analysierst, den **Product Carbon Footprint (PCF)**, im Deutschen auch CO_2-Fußabdruck genannt, berechnest und herausfindest, ab wann sich die PV-Anlage wirklich auszahlt.

*Die in diesem Tutorial dargestellten Situationen sind fiktiv, orientieren sich jedoch an realitätsnahen Szenarien. Sie wurden zu Lehrzwecken entwickelt.

1 Unsere Ausgangslage

Damit du die Fragen der Hochschule beantworten kannst, brauchst du zunächst einen Überblick über alle Emissionen, die während des Lebenszyklus einer PV-Anlage entstehen. Der **Lebenszyklus** beschreibt die Abschnitte im „Leben“ der PV-Anlage, von der Rohstoffgewinnung über die Herstellung und den Transport bis hin zur Nutzung und zum Recycling.
Für die notwendigen Berechnungen stellt dir die Hochschule die folgenden Daten zur Verfügung:

Tabelle 1: Emissionen entlang des Lebenszyklus einer PV-Anlage

Lebenszyklusphase	**Emissionen (kg CO_2)**
Rohstoffgewinnung	2.800
Produktion	1.600
Transport	200
Nutzung (25 Jahre)	0
Recycling	-100

Hinweise zu den Lebenszyklusphasen

- **Rohstoffgewinnung:** CO_2-Emissionen, die bei der Gewinnung der benötigten Materialien für die PV-Anlage entstehen (z. B. beim Abbau von Silizium, Metallen und anderen Rohstoffen).
- **Produktion:** Emissionen, die bei der Herstellung der Solaranlage (inkl. Anschlusskomponenten) entstehen.
- **Transport:** CO_2-Emissionen, die durch den Transport der Komponenten von Produktionsstätten zu Installationsorten verursacht werden.
- **Nutzung (25 Jahre):** Während des Betriebs der PV-Anlage entstehen keine direkten CO_2-Emissionen, da der Strom ohne Verbrennung erzeugt wird.
- **Recycling:** Am Ende der Nutzungsdauer können Materialien der PV-Anlage wiederverwertet werden. Dadurch werden Emissionen eingespart, weshalb dieser Wert als negative Emission (Gutschrift) angegeben ist und entsprechend abgezogen werden muss.

Der PCF fasst alle diese Emissionen zusammen: Positivwerte werden addiert, Gutschriften als negative Emissionen abgezogen. Er ist quasi der CO_2-Rucksack der PV-Anlage, den sie über die Nutzungsdauer durch die Produktion CO_2-neutralen Stroms ausgleichen muss, damit sie klimafreundlich wird.

2 Gesamter CO_2-Fußabdruck (PCF)

Im ersten Schritt möchten wir herausfinden, wie groß der gesamte CO_2-Fußabdruck der PV-Anlage ist.

Aufgabe 1: Berechnung kg CO_2-Fußabdruck

Berechne den gesamten PCF der PV-Anlage in kg CO_2 (cradle-to-grave = über den gesamten Lebenszyklus, inkl. Recyclinggutschrift).

Der gesamte PCF der Anlage beträgt ..... kg CO_2.

Ergebnis

Zur Berechnung müssen die Emissionswerte aller Phasen addiert werden. Die Recyclingzahl ist negativ und wird entsprechend abgezogen:

$$2.800 + 1.600 + 200 + 0 + (-100) = 4.500$$

Wenn du auf **4.500** kg CO_2 gekommen bist, super! Dann hast du die erste Aufgabe korrekt gelöst.

3 Spezifischer CO_2-Fußabdruck pro kWh

Um den PCF der PV-Anlage besser einordnen zu können, betrachten wir nun den spezifischen PCF. Dazu wird der gesamte kg CO_2-Fußabdruck der Anlage gleichmäßig auf die gesamte erzeugte Strommenge verteilt. Die Anlage erzeugt über ihre Lebensdauer von 25 Jahren insgesamt 150.000 Kilowattstunden (kWh) Strom.

Aufgabe 2: Berechnung spezifischer kg CO_2-Fußabdruck

Die Anlage erzeugt über ihre Lebensdauer von 25 Jahren insgesamt 150.000 kWh Strom. Berechne den spezifischen PCF pro kWh (in kg CO_2/kWh).

Der spezifische PCF der PV-Anlage beträgt ..... kg CO_2/kWh, also ..... g CO_2/kWh .

Zur Erinnerung

Bei Verhältnisrechnungen ist nicht zwingend die Größe der Zahlen entscheidend, sondern die Frage „pro was?“. Die Bezugsgröße steht immer im **Nenner**.

Ergebnis

Zur Berechnung teilen wir den gesamten CO_2-Fußabdruck der Anlage (4.500 kg CO_2) durch die gesamte erzeugte Strommenge von 150.000 kWh:

$$\frac{4.500 \text{ kg } CO_2}{150.000 \text{ kWh}} = \mathbf{0{,}03} \text{ kg } CO_2/\text{kWh}$$

Dieses Ergebnis entsteht, weil der gesamte CO_2-Fußabdruck rechnerisch gleichmäßig auf jede der erzeugten Kilowattstunden verteilt wird. Da 1 kg = 1.000 g entspricht, gilt:

$$0{,}03 \text{ kg} = 0{,}03 \cdot 1.000 \text{ g} = 30 \text{ g}$$

Somit beträgt der spezifische CO_2-Fußabdruck **30** g CO_2 pro kWh.

Die Hochschule Landshut kann nun abschätzen, wie viel CO_2 durchschnittlich in einer Kilowattstunde Solarstrom steckt.

4 Größter Emissionsanteil im Lebenszyklus

Um gezielt Verbesserungen vornehmen zu können, ist als Nächstes entscheidend, welche Lebenszyklusphase den größten Beitrag zu den gesamten Emissionen, also dem PCF, leistet. Daher lautet die nächste Aufgabe:

Aufgabe 3: Anteil der Lebenszyklusphasen

Bestimme, welche Lebenszyklusphase den größten Anteil an den Gesamtemissionen hat (in kg und %).

Die Lebenszyklusphase ..... hat den größten Anteil an den Gesamtemissionen der PV-Anlage, mit ..... kg CO_2 bzw. ca. ..... %.

Zur Erinnerung

Für die Prozentrechnung gilt allgemein:

$$\text{Anteil in \%} = \frac{\text{Teilwert}}{\text{Gesamtwert}} \cdot 100$$

Der Gesamtwert (PCF) beträgt hier 4.500 kg CO_2.

Ergebnis

Wenn du alles richtig gemacht hast, sind deine Lösungen: „**Rohstoffgewinnung**“, „**2.800** kg CO_2“ und ca. „**62,2** %“.
Um das Vorgehen zu verdeutlichen, berechnen wir den prozentualen Anteil einer Lebenszyklusphase mit einem geringeren Emissionswert, in diesem Fall die Transportphase. Diesen Wert können wir aus der Tabelle nehmen und dieser beträgt 200kg CO_2. Um nun den prozentualen Anteil zu bestimmen, setzen wir den Emissionswert der Transportphase ins Verhältnis zum gesamten CO_2-Fußabdruck der Anlage:

Veranschaulichung am Beispiel des Transports:

$$\frac{200\ \text{kg}}{4.500\ \text{kg}} \approx 0{,}0444 = 4{,}4\,\%$$

Die übrigen Lebenszyklusphasen lassen sich nach demselben Prinzip berechnen.

Damit weiß die Hochschule nun, in welcher Phase des Lebenszyklus der PV-Anlage die meisten kg CO_2-Emissionen entstehen. Somit ist die Analyse des Product Carbon Footprints abgeschlossen und du kannst sie der Hochschule als Analyse zur Umweltwirkung der Anlage bereitstellen.

5 Amortisation einer PV-Anlage bzgl. CO_2-Emissionen

Die Hochschule meldet sich jedoch noch einmal bei dir, bedankt sich für die bisherigen Ergebnisse und bittet um weitere Informationen, denn die bisherigen Analysen reichen für eine endgültige Entscheidung noch nicht aus. Die Hochschule möchte zusätzlich wissen, ab wann sich die PV-Anlage tatsächlich lohnt, also wie lange sie betrieben werden muss, um ihren CO_2-Rucksack, den PCF, abzubauen bzw. auszugleichen.
Wir nennen dies die CO_2-Amortisation, wobei **Amortisation** bedeutet, dass eine anfängliche Belastung durch spätere Einsparungen ausgeglichen wird.

Für die Berechnung der **Amortisationsdauer**, also wie lange es dauert, bis die Amortisation, sprich der Ausgleich, erfolgt ist, stellt dir die Hochschule die Informationen aus Tabelle 2 zur Verfügung. Im ersten Schritt berechnen wir aus den Daten, wie viel CO_2 durch die Anlage pro Jahr eingespart wird, weil sie emissionsfreien Strom erzeugt, der anderen, konventionell erzeugten Strom ersetzt.

Tabelle 2: Zusatzdaten zur Nutzung

Größe	**Wert**	**Bedeutung**
Produzierte Strommenge	5.000 kWh/Jahr	Wird pro Jahr von der PV-Anlage erzeugt
Eigenverbrauchsanteil	30% (1.500 kWh)	Wird direkt an der Hochschule genutzt
Einspeisung ins Netz	70% (3.500 kWh)	Überschuss, wird ins öffentliche Stromnetz eingespeist
Emissionen Strommix	0,4 kg CO_2/kWh	Emissionen des im Stromnetz erzeugten Stroms
Emissionen PV-Strom	0 kg/kWh	Emissionen bei der Produktion von PV-Strom
CO_2-Fußabdruck der Anlage	4.500 kg CO_2	CO_2-Belastung entlang des Lebenszyklus

Aufgabe 4: Jährliche CO_2-Einsparung

Berechne, wie viel an CO_2-Emissionen durch den von der PV-Anlage erzeugten Strom im Vergleich zu Strom aus dem öffentlichen Netz eingespart wird.

Durch die PV-Anlage werden pro Jahr insgesamt ..... kg CO_2, also ..... Tonnen CO_2 eingespart.

Zur Erinnerung

Die relevanten Zahlen hierbei sind, dass die PV-Anlage pro Jahr 5.000 kWh Strom produziert, die 0 kg Emissionen verursachen. Wohingegen jede kWh Strom aus dem öffentlichen Netz im Durchschnitt 0,4 kg CO_2 verursacht. (Siehe Tabelle.)

Ergebnis

Wenn Du auf **2.000** kg bzw. **2** Tonnen CO_2 kommst, passt alles.

Zur **Veranschaulichung** des Rechenwegs führen wir die Berechnung beispielhaft mit einer anderen Strommenge durch. Wir nehmen an, dass die Anlage 8.000 kWh pro Jahr produziert. Je produzierter kWh spart sie 0,4 kg CO_2 ein, weil diese nicht aus dem Stromnetz bezogen werden muss.
Insgesamt spart sie dann also

$$8.000 \text{ kWh} \cdot 0,4 \text{ kg } CO_2/\text{kWh} = 3.200 \text{ kg } CO_2$$

ein. Da 1 kg = 0,001 Tonnen entspricht, gilt:

$$3.200 \text{ kg} = 3.200 \cdot 0,001 \text{ Tonnen} = 3,2 \text{ Tonnen}$$

Die Berechnung für die in der Aufgabe gegebenen Werte erfolgt nach demselben Prinzip.

Wir wissen nun also, dass die PV-Anlage pro Jahr 2.000 kg CO_2 einspart. Im nächsten Schritt berechnen wir die CO_2-Amortisationsdauer der PV-Anlage, also wie viele Jahre es braucht, bis die 4.500 kg CO_2, die die Anlage an Emissionen verursacht hat, durch die jährliche Einsparung von 2.000 kg CO_2 ausgeglichen sind.

Aufgabe 5: CO_2-Amortisationszeit

Nach wie vielen Jahren hat die PV-Anlage ihren gesamten CO_2-Fußabdruck von 4.500 kg CO_2 ausgeglichen?

Die PV-Anlage hat sich CO_2-technisch nach ..... Jahren amortisiert. Danach produziert sie netto sauberen Strom und spart CO_2 ein.

Ergebnis

Wenn du als Ergebnis **2,25** Jahre hast, dann ist deine Berechnung korrekt.

Falls du nicht auf dieses Ergebnis gekommen bist, schauen wir uns die Berechnung noch einmal **anhand eines ähnlichen Beispiels** an. Wir nehmen dafür an, die jährliche Einsparung würde nur 1.500 kg CO_2 betragen. Die Frage ist dann also, wie viele Jahre 1.500 kg CO_2 eingespart werden müssen, um die 4.500 kg CO_2 auszugleichen, die die Anlage als CO_2-Rucksack mitbringt. Anders formuliert, fragen wir uns, wie oft wir 1.500 brauchen, um auf 4.500 zu kommen oder wie oft 1.500 in 4.500 passt. Die Antwort ist 3 und ergibt sich beispielsweise auch aus folgender Formel:

$$\text{Amortisationsdauer} = \frac{\text{Gesamter } CO_2\text{-Fußabdruck}}{\text{Jährliche } CO_2\text{-Einsparung}} = \frac{4.500 \text{ kg } CO_2}{1.500 \text{ kg } CO_2} = 3$$

Nach **3** Jahren hat die Anlage durch die jährlichen CO_2-Einsparungen also ihren CO_2-Fußabdruck ausgeglichen und produziert dann somit netto sauberen Strom.

Die CO_2-Amortisationsrechnung zeigt der Hochschule, nach wie vielen Jahren die PV-Anlage ihren CO_2-Fußabdruck ausgeglichen hat. Damit liegt nun eine klare Entscheidungsgrundlage für die ökologische Bewertung der Anlage vor.

6 Finanzielle Amortisation der PV-Anlage

Neben der ökologischen Betrachtung interessiert die Hochschule jedoch auch die wirtschaftliche Seite: Nach wie vielen Jahren rechnet sich die PV-Anlage finanziell? Daher betrachten wir im nächsten Schritt ergänzend die finanzielle Amortisation.
Dazu stellt uns die Hochschule die finanziellen Daten aus Tabelle 3 zur Verfügung; Wartungs- und Reparaturkosten werden zur Vereinfachung vernachlässigt.

Tabelle 3: Finanzielle Daten der PV-Anlage

Parameter	**Wert**
Anschaffungskosten der PV-Anlage	7.500 €
Jährliche Stromproduktion	5.000 kWh
Eigenverbrauchsanteil (30 %)	1.500 kWh
Einspeisung ins Netz (70 %)	3.500 kWh
Strompreis (Netzbezug)	0,30 €/kWh
Einspeisevergütung	0,08 €/kWh

Aufgabe 6: Jährlicher finanzieller Vorteil

Wie viel Geld kann durch die PV-Anlage pro Jahr durch den Eigenverbrauch eingespart werden? Wie viel kann durch die Einspeisung pro Jahr eingenommen werden? Wie hoch ist der gesamte jährliche finanzielle Vorteil?

Die PV-Anlage spart durch Eigenverbrauch ..... € pro Jahr und erzielt durch Einspeisung ..... € pro Jahr. Insgesamt ergibt sich ein jährlicher finanzieller Vorteil von ..... €.

Ergebnis

Wenn du auf **450** €, **280** € und insgesamt **730** € kommst, sind deine Ergebnisse korrekt.

Wir schauen uns zur **Veranschaulichung** des Rechenwegs wieder ein Beispiel mit etwas anderen Zahlen an, in dem wir davon ausgehen, dass nur 4.000 kWh erzeugt werden, von denen 1.000 kWh in den Eigenverbrauch und 3.000 kWh in die Einspeisung gehen.
Dadurch, dass die 1.000 kWh für den Eigenverbrauch nun kostenlos bezogen werden können und dafür keine 0,30 €/kWh bezahlt werden müssen, die anfielen, wenn der Strom aus dem Netz gekauft werden würde, werden

$$1.000\ \text{kWh} \cdot 0,30\ \text{€/kWh} = 300\ \text{€}$$

eingespart. Zudem werden 3.000 kWh in das Stromnetz eingespeist, wofür wir jeweils 0,08 €/kWh bekommen. Insgesamt werden in einem Jahr also

$$3.000\ \text{kWh} \cdot 0,08\ \text{€/kWh} = 240\ \text{€}$$

eingenommen. Zusammen ergibt das einen finanziellen Vorteil von $300\ \text{€} + 240\ \text{€} = 540\ \text{€}$.

Aufgabe 7: Finanzielle Amortisation

Nach wie vielen Jahren gleichen die jährlichen finanziellen Einsparungen die Anschaffungskosten der PV-Anlage aus?

Die PV-Anlage hat sich finanziell nach ca. ..... Jahren amortisiert.

Zur Erinnerung

$$\text{Finanzielle Amortisationszeit} = \frac{\text{Anschaffungskosten}}{\text{Jährlicher finanzieller Vorteil}}$$

Ergebnis

Wenn du auf ca. 10,3 Jahre kommst, hast du korrekt gerechnet. Der Rechenweg ist dabei analog zu dem bei der Amortisationsrechnung für die CO_2-Emissionen.

Deine Berechnung, dass die PV-Anlage nicht nur ökologisch, sondern auch finanziell eine gute Entscheidung ist, kannst du nun der Hochschule zeigen. Diese Erkenntnisse liefern damit eine nachvollziehbare Entscheidungsgrundlage für die geplante Investition.

7 Zusammenfassung und Reflexion

Wir halten fest:

- Der Product Carbon Footprint (PCF) und die Amortisationsrechnung helfen dabei, die Umweltwirkungen technischer Systeme sowohl ökologisch als auch wirtschaftlich zu bewerten.
  - CO_2-Emissionen entstehen nicht nur im Betrieb, sondern über den gesamten Lebenszyklus eines Produktes.
  - Erneuerbare Energien wie Photovoltaik verursachen zwar zunächst Emissionen, z. B. bei der Rohstoffgewinnung, der Herstellung und dem Transport, diese können jedoch durch ihren Betrieb über die Zeit ausgeglichen werden. Ein einmaliger CO_2-Aufwand wird durch eine kontinuierliche CO_2-Einsparung kompensiert.
- Gleichzeitig können sich nachhaltige Technologien wie Photovoltaik nicht nur ökologisch, sondern auch finanziell lohnen. Denn analog gilt:
  - Die Anschaffung verursacht zwar zunächst Kosten, diese können jedoch durch den Betrieb über die Zeit ausgeglichen werden. Der einmalige finanzielle Aufwand wird durch einen kontinuierlichen finanziellen Vorteil kompensiert.

Die Berechnungen zeigen, dass die PV-Anlage ihren anfänglichen CO_2-Fußabdruck bereits nach wenigen Jahren ausgleicht. Ab diesem Zeitpunkt leistet sie einen aktiven Beitrag zur Reduktion von CO_2-Emissionen. Außerdem rechnet sie sich mittelfristig auch finanziell. Gleichzeitig wird deutlich, dass bereits einfache mathematische Methoden ausreichen, um ökologische und wirtschaftliche Fragestellungen nachvollziehbar zu analysieren.

Der **Product Carbon Footprint** und die **Amortisationsrechnung** helfen dabei, die Umweltwirkungen technischer Systeme sowohl ökologisch als auch wirtschaftlich transparent zu bewerten.

Tabelle 4: Übersicht aller Berechnungsergebnisse

Betrachtung	**Ergebnis**
Gesamter PCF der PV-Anlage	4.500 kg CO_2
Spezifischer PCF	0,03 kg (bzw. 30 g) CO_2/kWh
Größter Emissionsanteil	Rohstoffgewinnung (2.800 kg CO_2 / ca. 62,2%)
Kleinerer Emissionsanteil	Transport (200 kg CO_2 / ca. 4,4%)
Jährliche CO_2-Einsparung	2.000 kg (bzw. 2 t) CO_2/Jahr
CO_2-Amortisationsdauer bei 2.000 kg Einsparung/Jahr	2,25 Jahre
CO_2-Amortisationsdauer bei 1.500 kg Einsparung/Jahr	3 Jahre
Jährlicher finanzieller Vorteil	730 €/Jahr
Finanzielle Amortisationszeit	ca. 10,3 Jahre

Du hast gelernt...

... wie man den CO_2-Fußabdruck (PCF) bestimmt, indem man Emissionswerte addiert,
... wie Verhältnisrechnung hilft, den PCF pro kWh zu berechnen,
... wie man Anteile in % darstellt,
... und wie man sowohl die CO_2-Amortisationsdauer als auch die finanzielle Amortisationsdauer mithilfe einer Division bestimmt.

HOCHSCHULE LANDSHUT
Stiftung Innovation in der Hochschullehre

Dieses Tutorial wurde an der **Hochschule Landshut** im Projekt „**WiNGS** – Wirtschaftsmathe nachhaltig und ganzheitlich sehen“ entwickelt. Das Projekt wurde durch die **Stiftung Innovation in der Hochschullehre** im Rahmen von Freiraum 2025 unter der Projektnummer 3003-1102 gefördert.