Lerntutorial: Lineare Funktionen und Modelle

Break-Even-Analyse von Elektro- und Verbrennerfahrzeugen



Abbildung 1: Symbolische Darstellung eines Elektro- und eines Verbrennerfahrzeuges.

Willkommen zum Tutorial!

Hallo und herzlich willkommen zu diesem Tutorial! Heute wird das Thema **„Lineare Funktionen“** anhand eines Praxisbeispiels, der Break-Even-Analyse von Elektro- und Verbrennerfahrzeugen, betrachtet.

Was du hier lernen wirst

- Einfache Bruch- und Prozentrechnung
- Lineare Funktionen und deren Modellierung
- Vergleichende Datenanalysen & Break-Even-Punkte

1 Lineare Funktionen im Fahrzeugvergleich

Stell dir vor, du möchtest ein neues Auto kaufen.* Es soll zuverlässig sein, gute Leistung bringen und gleichzeitig möglichst klimafreundlich sein. Besonders interessiert dich, ob ein Elektroauto, trotz der CO_2-intensiven Batterieproduktion, langfristig wirklich besser für das Klima ist.
Um eine gute Entscheidung zu treffen, vergleichst du deshalb die wichtigsten technischen und ökologischen Werte von Elektro- und Verbrennerfahrzeugen. Schritt für Schritt berechnest du, wie viel CO_2 die Fahrzeuge verursachen und ab wann sich ein Elektroauto wirklich lohnt, um letztendlich die beste Wahl zu treffen.

Unser Kontext: Fahrzeuge und CO_2-Emissionen

Um den Vergleich übersichtlicher darzustellen, sind im Folgenden die drei betrachteten Fahrzeuge mit ihren jeweiligen Kenndaten aufgeführt. Wir betrachten ein Elektrofahrzeug (**EM**) und zwei Fahrzeuge mit Verbrennungsmotor (**VM-1** und **VM-2**).

Tabelle 1: Kenndaten der betrachteten Fahrzeuge

Modell	Reichweite (km)	CO_2-Emission im Betrieb (g/km)	Energiespeicher (kWh)	CO_2 aus Batterie-/ Motorherstellung (g)
EM	437	70,86	81,3	6.504.000
VM-1	808	166,00	572,3	1.500.000
VM-2	670	185,00	572,3	1.500.000

*Die in diesem Tutorial dargestellten Situationen sind fiktiv, orientieren sich jedoch an realitätsnahen Szenarien. Sie wurden zu Lehrzwecken entwickelt.

Hinweise zur Datenbasis

- **Durchschnittswerte:** Die angegebenen Werte zu Reichweite und CO_2-Ausstoß sind realistische Durchschnittswerte. In der Praxis hängen diese stark vom Fahrverhalten, der Geschwindigkeit und der Strecke ab. Die Verwendung von Durchschnittswerten dient dazu, die mathematischen Zusammenhänge einfacher darstellen zu können.
- **Betriebsemissionen E-Auto:** Ein E-Auto verursacht während der Fahrt selbst keine direkten CO_2-Emissionen. CO_2 entsteht bei der Stromerzeugung für das Laden – insbesondere dann, wenn der Strom aus fossilen Energieträgern stammt. Wenn wir im Folgenden den CO_2-Ausstoß eines E-Autos pro gefahrenem Kilometer betrachten, verteilen wir diese beim Laden entstandenen Emissionen auf die zurückgelegte Fahrstrecke.
- **Energiespeicher & Herstellung:** Der Energiespeicher ist beim E-Auto die Batterie (81,3 kWh), beim Verbrenner der Tank (572,3 kWh Benzin/Diesel). Für einen fairen Vergleich wird für das E-Auto die CO_2-Emission aus der Batterieherstellung und für die Verbrenner aus der Herstellung des Antriebsstrangs (Motor/Tank) berücksichtigt.

2 Erstes Kriterium: Energie- und Reichweitenvergleich

2.1 Energiespeicher

Bevor wir vergleichen, wie weit die Autos kommen oder wie viel CO_2 sie ausstoßen, sollten wir verstehen, wie viel Energie sie überhaupt speichern können. Denn ein Auto mit größerem Energiegehalt kann grundsätzlich weiter fahren.

Aufgabe 1: Vergleich der Energiespeichergröße

Wie viel Mal, also um welchen Faktor, sind die Energiespeicher der Verbrennerfahrzeuge größer als der des EM?

Die Tanks des VM-1 und VM-2 speichern etwa ..... Mal mehr Energie als die Batterie des EM.

Zur Erinnerung

Wir berechnen ein Verhältnis: $\text{Verhältnis} = \dfrac{\text{Größe 1}}{\text{Größe 2}}$

Ergebnis

Zum Lösen von Aufgabe 1 teilen wir den größeren Wert (572,3) durch den kleineren Wert (81,3). So erhalten wir, wie oft der Energiespeicher des EM in den Tank des VM-1 bzw. VM-2 „hineinpasst“:

$$\text{Verhältnis} = \frac{572{,}3}{81{,}3} \approx \mathbf{7{,}04}$$

Die Verbrennerfahrzeuge können also ungefähr 7,04 Mal so viel Energie speichern wie das Elektrofahrzeug.

Dieses Ergebnis allein sagt noch nicht, welches Auto besser zu uns passt, es zeigt lediglich, dass die Energiespeicher unterschiedlich groß sind. Behalten wir das im Hinterkopf und machen weiter.

2.2 Reichweite

Nachdem wir nun verstanden haben, wie viel Energie die Fahrzeuge speichern können, untersuchen wir im nächsten Schritt, wie weit sie damit tatsächlich fahren können. Erst die Kombination aus Energie und Reichweite zeigt uns, wie effizient die Fahrzeuge sind.

Aufgabe 2: Reichweitenvergleich

Das Wievielfache an Reichweite haben der VM-1 und VM-2 jeweils im Vergleich zum EM?

Der VM-1 hat eine etwa .....-fache Reichweite und der VM-2 hat eine etwa .....-fache Reichweite im Vergleich zu dem EM.

Ergebnis

Um dies wieder zu berechnen, gehen wir im selben Prinzip vor wie bei der Aufgabe zuvor und erhalten als richtige Ergebnisse ungefähr 1,85 und 1,53.

2.3 Reichweite nach Update

Um die Hintergründe und die Rechenregeln noch besser zu verstehen, nehmen wir nun an, dass das Modell VM-1 ein Motor-Softwareupdate erhalten hat. Da diese Änderung auch für deine Kaufentscheidung wichtig sein könnte, müssen wir die Berechnungen entsprechend anpassen. Nach dem Update schafft der VM-1 nun 50 km mehr Reichweite.

Aufgabe 3: Reichweite nach Systemupdate

Das Wievielfache an Reichweite hat der VM-1 nach dem Systemupdate, also mit den 50 km mehr, im Verhältnis zum EM?

Der VM-1 hat nach der Motor-Softwareänderung eine etwa .....-fache Reichweite im Vergleich zu dem EM.

Zur Erinnerung

Kleiner Tipp: Die Bruchregeln nicht vergessen!

Ergebnis

Der richtige Wert ist ca. **1,96**.

Falls du nicht darauf gekommen bist, ist das nicht schlimm, wir gehen es Schritt für Schritt gemeinsam durch! Hier hättest du rechnen müssen:

$$\frac{808+50}{437} = \frac{858}{437} \approx 1{,}96$$

Wir haben also wieder ein Verhältnis berechnet, aber etwas zum Zähler hinzugefügt. Dazu sind im Folgenden noch einmal die Regeln erklärt:

Warum ist $\frac{808+50}{437}$ richtig und $\frac{808}{437}+50$ falsch?

- Wir wollen die neue Reichweite des VM-1 als Verhältnis zum EM darstellen. Dafür müssen wir die zusätzliche Reichweite im Zähler hinzufügen, denn nur dort stehen die Kilometer des VM-1 (unten stehen ja die des EM).
- Und da wir ein Verhältnis bilden, müssen wir beachten: 50 ist keine Verhältniszahl, sondern eine Strecke in Kilometern. $\frac{808}{437}$ ist ein Verhältnis, aber „+50“ wäre nur eine ganze Zahl, keine Verhältniszahl.
- Der Nenner (437 km) bleibt gleich, weil die Vergleichsbasis unverändert bleibt, da der EM ja kein Motor-Systemupdate bekommen hat. Deshalb müssen alle Kilometer, die zum VM-1 gehören, im Zähler stehen.
- Wir erinnern uns an diese Bruchregel:

  $$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

  Rein rechnerisch wäre auch $\frac{808}{437} + \frac{50}{437}$ korrekt, da beide Brüche denselben Nenner besitzen. In unserem Kontext ist diese Schreibweise jedoch weniger geeignet, da sie zunächst ein Verhältnis bildet und anschließend ein weiteres Verhältnis addiert. Da wir die neue Gesamtreichweite des VM-1 mit der Reichweite des EM vergleichen möchten, fassen wir zunächst alle Kilometer des VM-1 zusammen und bilden anschließend ein einziges Verhältnis: $\frac{808+50}{437}$.

Zwischenfazit

Jetzt wissen wir, wie viel Energie die Autos speichern und wie weit sie damit kommen. Wenn es danach geht, müssten wir uns für den VM-1 entscheiden, weil er im Vergleich zum EM das 7,04-fache an Energie speichern kann und damit das 1,85-fache an Reichweite hat. Allerdings zeigen diese Verhältnisse auch, dass der VM-1 viel ineffizienter ist. Denn mit dem mehr als 7-fachen an Energie, die er zur Verfügung hat, kommt er nicht auch 7-mal so weit, sondern eben nur 1,85-mal. Er verbraucht also viel mehr Energie beim Fahren und zudem auch noch in Form von Benzin, das einen hohen CO_2-Ausstoß verursacht. Der EM stößt als Elektroauto deutlich weniger CO_2 aus. Dafür startet er aber mit einer höheren CO_2-Startbelastung aus der Batterieproduktion.

3 Zweites Kriterium: CO_2-Break-Even-Analyse

Nach wie vielen Kilometern sind die kumulierten CO_2-Emissionen von EM und VM-1 gleich hoch, sowie von EM und VM-2, wenn die Startbelastungen berücksichtigt werden? Das klingt vielleicht erst kompliziert, aber wir machen das Schritt für Schritt.

3.1 Erst mal ein Gefühl bekommen

Wenn man nur wenige Kilometer fährt, hat der EM durch die hohe CO_2-Startbelastung aus der Batterieproduktion zunächst mehr Gesamtemissionen als der VM-1. Fährt man jedoch sehr viele Kilometer, z. B. 100.000 km, steigt der CO_2-Ausstoß beim VM-1 viel mehr an als beim EM: Beim VM-1 nämlich um 166 g pro km, also bei 100.000 km um 166 g/km $\cdot$ 100.000 km = 16,6 Mio. g bzw. 16, 6 Tonnen; beim EM hingegen nur um 70,86 g pro km und somit insgesamt um 70,86 g/km $\cdot$ 100.000 km $\approx$ 7,1 Tonnen. Dadurch kann es passieren, dass der EM ab einer bestimmten Fahrstrecke insgesamt klimafreundlicher wird. Diese Strecke nennen wir **Break-Even-Punkt** (oder „Kipppunkt“).

3.2 Verstehen, was passiert (Grafische Darstellung)

Der Verbrenner (VM-1) sammelt viel schneller CO_2 an (166 g/km). Der EM sammelt viel langsamer CO_2 an (70,86 g/km). Aber wir haben ja eben festgestellt, dass der EM mit einer viel höheren CO_2-Startbelastung

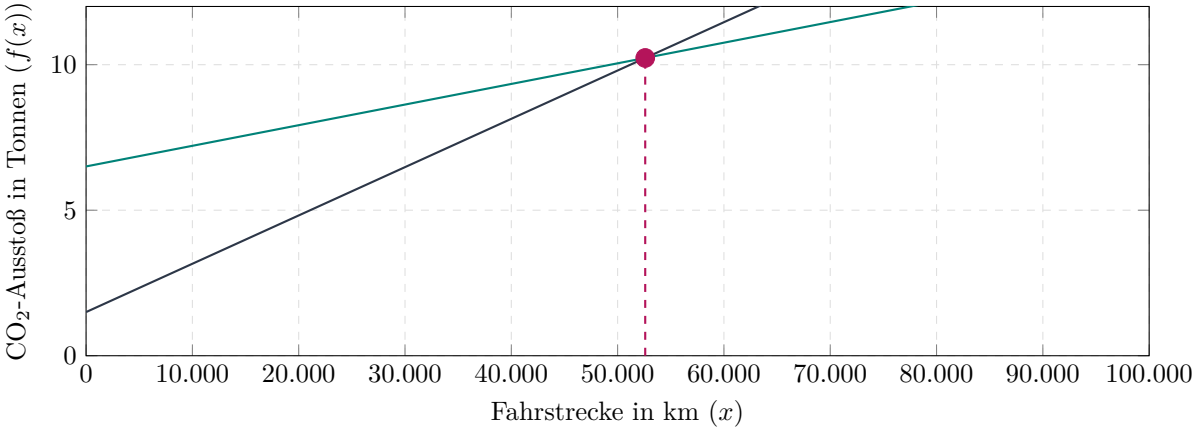


Abbildung 2: Break-Even-Diagramm – Schnittpunkt der kumulierten CO_2-Emissionen.

startet (6.504.000 g). Das sieht grafisch so aus:

- **EM** → startet sehr hoch (6.504.000 g $\approx 6,5$ Tonnen), steigt flach (70,86 g/km = 708.600 g pro 10.000 km $\approx$ 0,71 Tonnen pro 10.000 km).
- **VM-1** → startet niedriger (1.500.000 g = 1,5 Tonnen), steigt steil (166 g/km = 1.660.000 g pro 10.000 km = 1,66 Tonnen pro 10.000 km).

Diese beiden Geraden werden sich irgendwann schneiden und genau dort ist der Break-Even-Punkt (vgl. Abbildung 2). Genau an diesem Punkt sind die kumulierten CO_2-Emissionen beider Fahrzeuge gleich.

3.3 Mathematisches Modell: Lineare Funktionen aufstellen

Um den CO_2-Ausstoß eines Fahrzeuges über die gefahrene Strecke zu beschreiben, müssen wir uns überlegen, wovon die gesamten Emissionen abhängen. Dabei lassen sich zwei zentrale Einflüsse erkennen:

1. Zum einen gibt es einen **Startwert**, der bereits, bevor das Fahrzeug überhaupt gefahren wird, entsteht und addiert werden muss.
2. Zum anderen erhöht sich der CO_2-Ausstoß mit jedem gefahrenen Kilometer, da im Betrieb pro Kilometer zusätzlich CO_2 anfällt – mit unseren betrachteten Durchschnittswerten für jeden gefahrenen Kilometer immer die gleiche Menge.

Diese beiden Einflüsse lassen sich gemeinsam in einer Funktion darstellen.

Aufgabe 4: Lineare Funktionen für die Fahrzeuge aufstellen

Überlege nun, wie man die kumulierten CO_2-Emissionen eines Fahrzeuges in Abhängigkeit von den gefahrenen Kilometern x mathematisch darstellen kann. Verwende für jedes Fahrzeug eine eigene Funktion. Berücksichtige dabei:

- den CO_2-Ausstoß im Betrieb (g/km)
- die CO_2-Startbelastung aus der Herstellung (g)

Ergebnis

Wenn du auf diese Gleichungen gekommen bist, hast du alles richtig gemacht:

$$f_{\text{EM}}(x) = 70{,}86x + 6.504.000 \qquad f_{VM-1}(x) = 166x + 1.500.000 \qquad f_{\text{VM-2}}(x) = 185x + 1.500.000$$

Der Zusammenhang lässt sich mithilfe einer linearen Funktion beschreiben, allgemein wäre das so:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

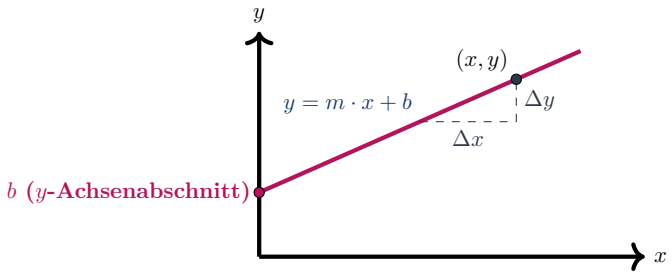


Abbildung 3: Bestandteile einer linearen Funktion.

Bedeutung der Formel

Die allgemeine Formel:	**Auf unser Autobeispiel bezogen:**
m ist die Steigung der Gerade	m ist der CO_2-Ausstoß pro Kilometer (g/km)
b ist der y-Achsenabschnitt	b ist der Start-CO_2-Wert (z. B. Batterieproduktion)
x ist die unabhängige Variable	x sind die gefahrenen Kilometer
$f(x)$ ist der Funktionswert	$f(x)$ ist die gesamte CO_2-Emission nach x Kilometern

3.4 Break-Even berechnen

Der Break-Even-Punkt für die gesamten CO_2-Emissionen von EM und VM-1 liegt bei der Kilometerzahl, bei der beide Fahrzeuge insgesamt gleich viel CO_2 ausgestoßen haben.

Aufgabe 5: Break-Even-Berechnung (EM vs. VM-1)

Nach wie vielen Kilometern sind die gesamten CO_2-Emissionen von EM und VM-1 gleich hoch?

Der Break-Even-Punkt zwischen EM und VM-1 liegt bei ca. ..... km.

Ergebnis

Falls dein Ergebnis bei ca. **52.596 km** liegt, dann hast du alles richtig gemacht!

Andernfalls schau dir einfach die Schritt-für-Schritt-Erklärung für den Vergleich von VM-2 und EM im Folgenden an. Anhand dieser kannst du dann auch den Break-Even-Punkt von VM-1 und EM korrekt berechnen.

Der Break-Even-Punkt liegt dort, wo die gesamten CO_2-Emissionen der beiden betrachteten Fahrzeuge gleich sind, also die beiden linearen Funktionen den gleichen Funktionswert haben:

$$f_{\text{VM-2}}(x) = f_{\text{EM}}(x)$$

Die linearen Funktionen haben wir in Aufgabe 4 schon aufgestellt und können sie einsetzen:

$$185x + 1.500.000 = 70{,}86x + 6.504.000$$

Anschließend lösen wir die Gleichung nach der Variable x auf:

$$\begin{aligned} 185x - 70{,}86x &= 6.504.000 - 1.500.000 \\ 114{,}14x &= 5.004.000 \\ x &= \frac{5.004.000}{114{,}14} \approx 43.841 \text{ km} \end{aligned}$$

Der Break-Even-Punkt zwischen VM-2 und EM liegt also bei ca. 43.841 km. Dieser ist früher als beim VM-1 (52.596 km), weil der VM-2 höhere Emissionen pro km verursacht.

3.5 Vertiefung: Lösungsweg anhand anderer Werte

Um das Ganze nochmal verständlicher zu machen und zu vertiefen, wenden wir nun dasselbe lineare Modell auf geänderte Parameter an. Der Rechenweg bleibt dabei identisch. In diesem Fall haben sich leider die Emissionen in der Batterieherstellung des EM geändert und betragen nun 7.000.000 g CO_2. Der Rest bleibt unverändert.

Aufgabe 6: Vertiefung

Berechne den neuen Break-Even-Punkt zwischen EM und VM-1 bei einer Batterieherstellungs-Emission von 7.000.000 g.

Der Break-Even-Punkt zwischen EM und VM-1 liegt nun bei ca. ..... km.

Ergebnis

Durch die höhere CO_2-Startbelastung verschiebt sich der Break-Even-Punkt zu einer größeren Kilometerzahl, der EM rentiert sich bzgl. der CO_2-Emissionen erst ab 57.810 km.

4 Drittes Kriterium: Finanzielle Belastung

Neben den CO_2-Emissionen spielt beim Autokauf natürlich auch der Preis eine wichtige Rolle. Deshalb betrachten wir nun zusätzlich die finanzielle Belastung. Dabei untersuchen wir, ab wann sich die höheren Anschaffungskosten des Elektroautos durch geringere Betriebskosten ausgleichen.

Für unser Beispiel verwenden wir folgende Werte:

Tabelle 2: Finanzielle Parameter im Vergleich

Kriterium	EM	VM-1	VM-2
Anschaffungskosten	58.000 €	52.000 €	88.000 €
Betriebskosten	0,06 €/km	0,15 €/km	0,20 €/km

Der EM ist in der Anschaffung zunächst teurer als das günstigere Verbrennermodell. Dafür spart er jedoch bei jeder gefahrenen Strecke Betriebskosten, weil der Strom günstiger ist als das Benzin im Durchschnitt. (Es wird dabei jeweils ein durchschnittlicher Verbrauch angenommen.)

Aufgabe 7: Finanzielle Amortisation

1. Wie viel Geld spart der EM pro 100 km im Vergleich zum VM-1?
2. Nach wie vielen Kilometern gleichen die geringeren Betriebskosten des EM die höheren Anschaffungskosten aus (finanzieller Break-Even)?

1. Der EM spart pro 100 km im Vergleich zum VM-1 genau ..... €.
2. Der finanzielle Break-Even liegt bei ca. ..... km.

Ergebnis

Falls deine Ergebnisse **9 €** und ca. **66.667 km** sind, passt alles!

Andernfalls schau dir gerne wieder die Schritt-für-Schritt-Erklärung an:

1. Zuerst berechnen wir die Ersparnis pro km:

$$0{,}15\,€ - 0{,}06\,€ = 0{,}09\,€/\text{km}$$

Der EM spart also 0,09 € pro km im Vergleich zum VM-1 und somit $0{,}09€ \cdot 100 = 9\,€$ pro 100 km.

2. Wir stellen zunächst wieder die linearen Gleichungen für die Gesamtkosten der beiden Fahrzeuge auf:

$$\begin{aligned} \text{VM-1}: &\quad K_{VM-1}(x) = 52.000 + 0{,}15x \\ \text{EM}: &\quad K_{\text{EM}}(x) = 58.000 + 0{,}06x \end{aligned}$$

Zur Berechnung des finanziellen Break-Even-Punkts zwischen EM und VM-1 werden die entsprechenden Funktionen gleichgesetzt:

$$52.000 + 0{,}15x = 58.000 + 0{,}06x$$

Anschließend lösen wir die Gleichung nach der Variablen x auf:

$$\begin{aligned} 0{,}15x - 0{,}06x &= 58.000 - 52.000 \\ 0{,}09x &= 6.000 \\ x &= \frac{6.000}{0{,}09} \\ x &\approx 66.667 \text{ km} \end{aligned}$$

Nach ungefähr 66.667 km haben sich die höheren Anschaffungskosten des EM durch die niedrigeren Betriebskosten ausgeglichen. Ab diesem Zeitpunkt ist der EM insgesamt günstiger als der VM-1.

Man erkennt also: Während der EM bei den Anschaffungskosten zunächst teurer ist, kann er sich über eine längere Nutzungsdauer finanziell auszahlen — ähnlich wie bereits bei der CO_2-Break-Even-Analyse.

Gedankenspiel: Vergleich EM vs. VM-2

Vergleiche sowohl die Anschaffungskosten als auch die laufenden Betriebskosten des EM und des VM-2. Welche Auswirkungen hat dies auf die Gesamtkosten beider Fahrzeuge und welche Schlussfolgerung lässt sich hinsichtlich eines möglichen Break-Even-Punkts ziehen?

5 Zusammenfassung und Reflexion

Was wir daraus lernen

Wir haben gesehen, wie sich verschiedene Fahrzeugtypen in Bezug auf Energieverbrauch, Reichweite und CO_2-Emissionen unterscheiden. Besonders wichtig ist dabei: Die tatsächliche Klimabilanz eines Fahrzeugs hängt nicht nur vom Verbrauch pro Kilometer ab, sondern auch von einmaligen Emissionen wie der Batterieproduktion beim Elektroauto.

Abschluss und Reflexion

Die Analyse zeigt deutlich, dass Elektrofahrzeuge trotz hoher CO_2-Startbelastung langfristig klimafreundlicher fahren. Verbrenner wirken zu Beginn effizienter, verursachen aber über die Zeit deutlich höhere Gesamtemissionen. Für eine fundierte Kaufentscheidung lohnt es sich daher immer, nicht nur den Anfangswert, sondern die gesamte Lebensdauer eines Fahrzeugs zu betrachten.

Tabelle 3: Zusammenfassung der Ergebnisse

Vergleichsgröße	**VM-1 vs. EM**	**VM-2 vs. EM**
Energiespeicher	7-mal größer	7-mal größer
Reichweite	1,85-mal größer	1,53-mal größer
CO_2-Break-Even	Bis 52.596 km verursacht der VM-1 weniger CO_2, ab dann der EM.	Bis 43.841 km verursacht der VM-2 weniger CO_2, ab dann der EM.
Finanzieller Break-Even	Bis 66.667 km ist der VM-1 günstiger, ab dann der EM.	EM ist von Anfang an günstiger und bleibt es auch.

Lernergebnis

In diesem Tutorial zum Thema lineare Funktionen und CO_2-Vergleiche hast du am Beispiel verschiedener Fahrzeugtypen gelernt:

- wie man Verhältniszahlen zum Vergleich verschiedener Werte verwendet,
- wie man lineare Modelle zur Berechnung von Emissionen verwendet,
- was Break-Even-Punkte sind.

Solche Modelle helfen nicht nur bei mathematischen Aufgaben, sondern auch bei realen Entscheidungen, wie beim Autokauf, beim Energiesparen oder bei der Bewertung von Umweltwirkungen.

Stiftung Innovation in der Hochschullehre

Dieses Tutorial wurde an der **Hochschule Landshut** im Projekt „**WiNGS** – Wirtschaftsmathe nachhaltig und ganzheitlich sehen“ entwickelt. Das Projekt wurde durch die **Stiftung Innovation in der Hochschullehre** im Rahmen von Freiraum 2025 unter der Projektnummer 3003-1102 gefördert.